KKU Res. J. 2013; 18(3): 501-510
http : //resjournal.kku.ac.th

ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบล็อกปกติและการประยุกต์
Confidence Intervals for the Mean of Lognormal Distribution with Application

*ดนุพล ทองคำ สองเมือง เหล่าตระกูล และ วุฒิชัย ศรีโสดาพล**
*Danupon Thongkum, Songmuang Laotrakool and Wuttichai Srisodaphol**

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ขอนแก่น 40002
**Correspondent author: e-mail: wuttsr@kku.ac.th*

บทคัดย่อ

ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบล็อกปกติถูกนำเสนอ โดยพิจารณาจากช่วงความเชื่อมั่นของ Krishnamoorthy และ Mathew(1) และ Olsson(2) โดยตัวประมาณแบบจุดในแต่ละช่วงความเชื่อมั่นถูกแทนที่โดยตัวประมาณแจ็คไนฟ์ และตัวประมาณเบส์เซียน ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและความกว้างของช่วง คือ เกณฑ์ในการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นทั้งหมด ผลของการเปรียบเทียบแสดงโดยการจำลองข้อมูลและใช้ข้อมูลจริง

Abstract

The improved confidence intervals of lognormal distribution are proposed based on Krishnamoorthy and Mathew(1) and Olsson(12). The point estimators in each confidence interval are substituted by Jackknife estimator and Bayesian estimator. Coverage Probability and interval width are criterion to compare among the confidence intervals. The results of this comparison are shown in simulation study and real data set.

คำสำคัญ: ช่วงความเชื่อมั่น, ความน่าจะเป็นครอบคลุม, ความกว้างช่วง, การแจกแจงแบบล็อกปกติ
Keywords: confidence interval, coverage probability, interval width, lognormal distribution

1. บทนำ

การแจกแจงแบบล็อกปกติ (Lognormal distribution) ได้ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในการอธิบายการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทางบวก โดยเฉพาะข้อมูลเกี่ยวกับสุขอนามัย และข้อมูลทางชีววิทยา เป็นต้น ซึ่งการแจกแจงแบบล็อกปกติเป็นการแจกแจงแบบเบ้ขวา ถ้าข้อมูลมีการแจกแจงแบบล็อกปกติแล้ว ค่าลอการิทึมของข้อมูลจะมีการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) กล่าวคือ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบล็อกปกติ โดยให้ $Y = \ln X$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ เมื่อ μ และ σ^2 แทนค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ Y โดยค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X คือ $E(X)=E(e^Y)=e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})}$ และความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X คือ $Var(X)=Var(e^Y)=(e^{\sigma^2}-1)e^{(2\mu+\sigma^2)}$ ซึ่งมีผู้ทำการศึกษาเกี่ยวกับช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยจากการแจกแจงแบบล็อกปกติอย่างกว้างขวาง เช่น ในปี 1997 Zhou และ Gao (3) ได้พัฒนาช่วงความเชื่อมั่นจาก Land (4) โดยเรียกว่าวิธีการประมาณแบบคอกซ์ (The Cox Method) ซึ่งใช้ได้ดีสำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่ จากนั้นในปี 1998 Angus (5) ได้นำแนวคิดของ Zhou และ Gao (3) มาสร้างช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยจากการแจกแจงแบบล็อกปกติ เรียกว่า "The Angus's Conservative Method" แล้วพบว่าเป็นช่วงความเชื่อมั่นมีความน่าจะเป็นครอบคลุมใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด และเป็นช่วงที่แคบกว่าวิธีการประมาณแบบคอกซ์ ต่อมาในปี 2003 Krisnamoorthy และ Mathew (1) ได้นำเสนออัลกอริทึม (Algorithm) สำหรับวิธีเจเนอรัลไลซ์ พี-วาลู และวิธีเจเนอรัลไลซ์คอนฟิเดนซ์อินเทอร์วัลส์ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยจากการแจกแจงแบบล็อกปกติ เรียกว่า "The Generalized Confidence Interval Method of Krishnamoorthy" ซึ่งพบว่าเป็นวิธีการที่สะดวกต่อการนำไปใช้เนื่องจากคำนวณได้ง่ายและเหมาะสมที่จะใช้กับตัวอย่างขนาดเล็ก และในปี 2005 Olsson (2) ได้นำวิธีการประมาณแบบคอกซ์ มาปรับปรุงซึ่งเดิมทีใช้ค่าสถิติที่มีการแจกแจงแบบ z จึงทำการเปลี่ยนเป็นค่าสถิติที่มีการแจกแจงแบบ t และสามารถทำให้ประสิทธิภาพของตัวประมาณดีขึ้นจึงได้วิธีใหม่ที่เรียกว่า "The Modified Cox Method"

สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะเสนอช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยการแจกแจงแบบล็อกปกติใหม่ โดยปรับปรุงจากช่วงความเชื่อมั่นแบบ The Generalized Confidence Interval Method of Krishnamoorthy (1) ซึ่งเป็นช่วงความเชื่อมั่นของ $\ln\theta$ เมื่อ $\theta = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ โดยกำหนดให้ $Z_j < N(0,1)$ และ $U_j^2 < x^2_{(n-1)}$

$$T_j = \bar{y} - \frac{Z_j}{U_j\big/\sqrt{n-1}}\frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{s^2}{2U_j^2/(n-1)}$$

เมื่อ $\bar{y}$ คือค่าเฉลี่ยของ y นั่นคือ $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

s คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ y นั่นคือ

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}$$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}$ คือควอนไทล์ที่ $\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงแบบไคกำลังสองด้วยระดับขั้นเสรี (Degree of freedom) เท่ากับ *n-1*

โดยนำค่า T_j มาจัดเรียงจากค่าน้อยไปหามาก จากนั้นคำนวณหาค่าที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 100(α/2) กำหนดให้เป็น T_{JL} และหาค่าที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 100(1-α/2) กำหนดให้เป็น T_{JU} ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่นของ $\ln\theta$ ได้แก่ (T_{JL}, T_{JU}) และช่วงความเชื่อมั่นของ $\theta = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ คือ $\left(e^{T_{JL}}, e^{T_{JU}}\right)$ และ ช่วงความเชื่อมั่นของ The Modified Cox Method (6) คือ

$$\left(\bar{y}+\frac{s^2}{2}-t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}\sqrt{\frac{s^2}{n}+\frac{s^4}{2(n-1)}},\ \bar{y}+\frac{s^2}{2}+t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}\sqrt{\frac{s^2}{n}+\frac{s^4}{2(n-1)}}\right)$$

เมื่อ $t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}$ คือควอนไทล์ที่ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงแบบทีด้วยระดับขั้นเสรี เท่ากับ *n-1*
ซึ่งเป็นช่วงความเชื่อมั่นของ lnθ ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของ $\theta = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ คือ

$$\left(e^{\bar{y}+\frac{s^2}{2}-t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}\sqrt{\frac{s^2}{n}+\frac{s^4}{2(n-1)}}}, e^{\bar{y}+\frac{s^2}{2}+t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}\sqrt{\frac{s^2}{n}+\frac{s^4}{2(n-1)}}} \right)$$

จากช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 2 จะทำการปรับตัวประมาณแบบจุดของ μ และ σ² โดยใช้ตัวประมาณแจ็คไนฟ์และตัวประมาณเบส์เซียน แล้วทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นที่นำเสนอและช่วงความความเชื่อมั่นของ The Generalized Confidence Interval Method of Krishnamoorthy และ The Modified Cox Method โดยใช้เกณฑ์ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม (Coverage probability) ซึ่งเป็นค่าความน่าจะเป็นที่ช่วงความเชื่อมั่นจะคลุมค่าพารามิเตอร์จริงและความกว้างของช่วง (Interval width)

2. วิธีการวิจัย

จากช่วงความความเชื่อมั่นของ The Generalized Confidence Interval Method of Krishnamoorthy และ The Modified Cox Method จะเห็นได้ว่าตัวประมาณแบบจุดของ μ และ σ² คือ $\bar{y}$ และ s^2 ตามลำดับ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ทำการปรับตัวประมาณแบบจุดโดยใช้ตัวประมาณแจ็คไนฟ์และตัวประมาณเบส์เซียน ได้แก่

1. ตัวประมาณแจ็คไนฟ์ (6) ของพารามิเตอร์ μ และ σ² คือ

$$\hat{\theta}_J = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(n\hat{\theta}-(n-1)\hat{\theta}_{-i}\right)$$

โดย θ คือพารามิเตอร์ใดๆ ในที่นี้คือ μ และ σ²

$\hat{\theta}_{-i}$ คือตัวประมาณของ θ เมื่อตัดค่าที่ i ของข้อมูล y ออก โดยตัวประมาณของ μ และ σ² คือ

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{และ} \quad \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2$$

ตามลำดับ

2. ตัวประมาณเบส์เซียน (7) โดยการแจกแจงก่อน (Prior distribution) ของพารามิเตอร์ $\theta = \left(\mu, \sigma^2\right)$ สำหรับการแจกแจงแบบล็อกปกติ ใช้วิธีของ Jeffreys คือ $\pi\left(\theta\right) \propto \sigma^{-3}$ และได้ตัวประมาณเบส์เซียนของพารามิเตอร์ μ และ σ² ดังนี้

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y} \text{ และ } \hat{\sigma}^2 = \frac{(\nu+1)s^2}{\nu-1} \text{ เมื่อ } \nu = n-1$$

2.1 ช่วงความเชื่อมั่นที่นำเสนอ

CI1: ช่วงความเชื่อมั่นของ θ คือ

$$\left(e^{\bar{y}_J+\frac{s_J^2}{2}-t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}\sqrt{\frac{s_J^2}{n}+\frac{s_J^4}{2(n-1)}}}, e^{\bar{y}_J+\frac{s_J^2}{2}+t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}\sqrt{\frac{s_J^2}{n}+\frac{s_J^4}{2(n-1)}}} \right)$$

เมื่อ $\bar{y}_J$ คือ ค่าเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณด้วยวิธีแจ็คไนฟ์ของ y

s_J คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ได้จากการประมาณด้วยวิธีแจ็คไนฟ์ของ y

$t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}$ คือ ควอนไทล์ที่ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงแบบทีด้วยระดับขั้นเสรี เท่ากับ $n-1$

CI2: ช่วงความเชื่อมั่นของ θ

กำหนดให้ $Z_j \sim N(0,1)$และ $U_j^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$

$$T_j = \bar{y}_J - \frac{Z_j}{U_j\big/\sqrt{n-1}}\frac{s_J}{\sqrt{n}} + \frac{s_J^2}{2U_j^2/(n-1)}$$

นำค่า T_j มาจัดเรียงจากค่าน้อยไปหามาก จากนั้นคำนวณหาค่าที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ $100(\alpha/2)$ กำหนดให้เป็น T_{JackL} และหาค่าที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ $100(1-\alpha/2)$ กำหนดให้เป็น T_{JackU} ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่นของ $\ln\theta$ ได้แก่ $\left(T_{JackL}, T_{JackU}\right)$ และช่วงความเชื่อมั่นของ θ นั่นคือ CI2 คือ $\left(e^{T_{JackL}}, e^{T_{JackU}}\right)$

CI3: ช่วงความเชื่อมั่นของ θ คือ

$$\left(e^{\bar{y}+\frac{s_B^2}{2}-t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}\sqrt{\frac{s_B^2}{n}+\frac{s_B^4}{2(n-1)}}}, e^{\bar{y}+\frac{s_B^2}{2}+t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}\sqrt{\frac{s_B^2}{n}+\frac{s_B^4}{2(n-1)}}} \right)$$

เมื่อ $s_B^2 = \dfrac{(\nu+1)\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}{\nu(\nu-1)} \quad ; \nu = n-1$

CI4: ช่วงความเชื่อมั่นของ θ

กำหนดให้ $Z_j \sim N(0,1)$และ $U_j^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$

$$T_j = \bar{y} - \frac{Z_j}{U_j \big/ \sqrt{n-1}} \frac{s_B}{\sqrt{n}} + \frac{s_B^2}{2U_j^2/(n-1)}$$

นำค่า T_j มาจัดเรียงจากค่าน้อยไปหามาก จากนั้นคำนวณหาค่าที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ $100(\alpha/2)$ กำหนดให้เป็น T_{BL} และหาค่าที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ $100(1-\alpha/2)$ กำหนดให้เป็น T_{BU} ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่นของ $\ln\theta$ ได้แก่ (T_{BL}, T_{BU}) และช่วงความเชื่อมั่นของ θ นั่นคือ CI4 คือ $\left(e^{T_{BL}}, e^{T_{BU}}\right)$

2.2 การเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่น

จำลองข้อมูล $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงแบบล็อกปกติโดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ดังนี้ σ^2= 0.5, 1, 5, 20; $\mu = -\frac{\sigma^2}{2}$ (8) และขนาดตัวอย่าง n = 5, 10, 20 และ 30 แล้วทำการแปลงข้อมูลเป็น $y_1 = \ln(x_1), y_2 = \ln(x_2), ..., y_n = \ln(x_n)$ เพื่อนำข้อมูล $y_1, y_2, ..., y_n$ ไปคำนวณหาช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 6 ช่วงสำหรับ $\ln\theta$ เมื่อ $\theta = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ ได้แก่ The Generalized Confidence Interval Method of Krishnamoorthy, The Modified Cox Method และ CI1-CI4 โดยการทำซ้ำ 1,000 ครั้ง ที่ระดับช่วงความเชื่อมั่น 90% และ 95% เพื่อค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าความกว้างของช่วงเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นทั้งหมด โดย

1. ความน่าจะเป็นครอบคลุม หาได้โดยการหาช่วงความเชื่อมั่นในแต่ละวิธีจากการทำซ้ำ 1,000 ครั้ง จากนั้นนับจำนวนครั้งของช่วงความเชื่อมั่นที่ครอบคลุมค่าเฉลี่ยที่กำหนดเพื่อหาค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม
2. ค่าความกว้างของช่วง หาจาก

ความกว้าง = $U_i - L_i$ โดย $i = 1, 2, ..., 1000$

เมื่อ U คือค่าขอบบนของช่วงความเชื่อมั่น

L คือค่าขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่น

จากนั้นหาค่าเฉลี่ยค่าความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแต่ละแบบและทำการหาค่าความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นจากข้อมูลจริง 1 ชุดข้อมูล

3. ผลการวิจัย

3.1 ความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าความกว้างของช่วงจากการจำลองข้อมูล

จากผลการจำลองข้อมูลได้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมช่วงเมื่อเทียบเป็นร้อยละและค่าความกว้างของช่วงเฉลี่ยสำหรับค่าเฉลี่ยจากการแจกแจงแบบล็อกปกติทั้ง 6 วิธี ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% และ 95% ได้ทำการเปรียบเทียบเพื่อหาช่วงความเชื่อมั่นที่เหมาะสม โดยช่วงความเชื่อมั่นที่มีร้อยละของค่าครอบคลุมที่ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าความกว้างเฉลี่ยน้อย ดังตาราง 1-4

ตารางที่ 1. ร้อยละของค่าครอบคลุมที่ระดับความเชื่อมั่น 90%

n	ช่วงความเชื่อมั่น	σ^2			
		0.5	1	5	20
5	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	88.50	86.90	89.60	88.40
	Modified Cox	89.50	88.00	84.70	80.30
	CI1	84.90	81.60	76.90	71.10
	CI2	86.60	86.30	88.90	89.20
	CI3	94.10	93.50	93.30	91.40
	CI4	89.40	85.10	78.20	77.20
10	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	89.30	89.50	89.60	87.90
	Modified Cox	89.40	90.20	87.80	86.10
	CI1	87.30	88.10	83.80	79.50
	CI2	88.10	89.20	91.40	88.40
	CI3	93.10	93.30	94.70	91.80
	CI4	90.30	88.20	86.00	83.70
20	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	89.20	89.70	91.60	90.90
	Modified Cox	90.50	89.90	90.40	88.90
	CI1	89.80	88.40	88.00	86.30
	CI2	88.70	89.80	91.80	91.00
	CI3	91.50	92.00	93.40	92.90
	CI4	89.60	88.80	88.20	88.00
30	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	90.00	89.80	88.20	90.20
	Modified Cox	89.90	89.80	88.10	89.00
	CI1	89.30	89.00	87.70	87.10
	CI2	90.20	89.10	88.30	90.20
	CI3	91.70	91.40	89.90	91.80
	CI4	89.90	90.40	86.40	88.10

ตารางที่ 2. ความกว้างของช่วงเฉลี่ยที่ระดับความเชื่อมั่น 90%

n	ช่วงความเชื่อมั่น	σ^2			
		0.5	**1**	**5**	**20**
5	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	1.884	3.274	13.843	52.967
	Modified Cox	1.426	2.136	8.635	31.260
	CI1	1.229	1.910	6.589	23.222
	CI2	1.498	2.542	10.339	39.042
	CI3	2.089	3.454	13.712	51.339
	CI4	2.815	5.063	22.570	87.774
10	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	0.984	1.596	6.007	22.366
	Modified Cox	0.916	1.434	4.991	17.994
	CI1	0.851	1.323	4.502	16.052
	CI2	0.910	1.462	5.394	19.919
	CI3	1.053	1.677	6.073	22.307
	CI4	1.145	1.889	7.362	27.793
20	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	0.626	0.988	3.515	13.045
	Modified Cox	0.608	0.945	3.236	11.816
	CI1	0.588	0.912	3.089	11.219
	CI2	0.605	0.951	3.352	12.380
	CI3	0.648	1.016	3.546	13.073
	CI4	0.669	1.064	3.858	14.441
30	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	0.503	0.779	2.764	10.102
	Modified Cox	0.493	0.759	2.619	9.474
	CI1	0.483	0.741	2.541	9.161
	CI2	0.492	0.761	2.681	9.767
	CI3	0.515	0.795	2.780	10.121
	CI4	0.525	0.818	2.937	10.795

จากตารางที่ 1 พิจารณาร้อยละของค่าครอบคลุมของช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่าช่วงความเชื่อมั่น Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy และ CI2 มีร้อยละของค่าครอบคลุมใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนช่วงความเชื่อมั่น Modified Cox, CI1 และ CI4 มีร้อยละของค่าครอบคลุมต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่จะใกล้เคียงเมื่อความแปรปรวนมีค่าน้อย และช่วงความเชื่อมั่น CI3 มีร้อยละของค่าครอบคลุมมากกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่เมื่อพิจารณาความกว้างของช่วงเฉลี่ยสำหรับช่วงความเชื่อมั่นที่มีร้อยละของค่าครอบคลุมใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดดังตารางที่ 2 พบว่าช่วงความเชื่อมั่น CI2 มีความกว้างของช่วงเฉลี่ยน้อยกว่า Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy

ตารางที่ 3. ร้อยละของค่าครอบคลุมที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

n	**ช่วงความเชื่อมั่น**	σ^2			
		0.5	**1**	**5**	**20**
5	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	94.50	93.20	94.50	95.80
	Modified Cox	93.70	91.60	88.80	87.80
	CI1	90.30	87.40	82.40	81.00
	CI2	92.50	91.20	94.30	96.40
	CI3	97.50	96.40	94.40	95.00
	CI4	95.90	91.90	87.90	84.20
10	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	94.60	94.70	93.10	95.70
	Modified Cox	93.80	94.80	89.80	90.20
	CI1	92.30	92.50	85.80	86.40
	CI2	94.10	94.40	93.40	95.90
	CI3	96.10	96.70	94.40	95.50
	CI4	95.30	93.80	90.80	91.30
20	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	93.60	94.50	95.30	95.70
	Modified Cox	94.50	94.40	93.60	92.30
	CI1	94.20	93.90	91.90	89.90
	CI2	93.20	94.30	95.50	95.10
	CI3	95.20	96.20	96.30	95.80
	CI4	94.50	94.60	94.90	93.50
30	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	94.00	95.50	93.40	94.60
	Modified Cox	94.80	95.10	92.00	93.20
	CI1	94.60	94.20	91.00	91.30
	CI2	93.70	95.60	94.00	94.70
	CI3	95.10	96.40	94.50	95.60
	CI4	94.20	95.00	93.20	93.10

ตารางที่ 4. ความกว้างของช่วงเฉลี่ยที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

n	ช่วงความเชื่อมั่น	σ^2 0.5	1	5	20
5	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	2.685	4.761	20.188	83.193
	Modified Cox	1.940	3.082	10.931	42.184
	CI1	1.600	2.487	8.349	31.326
	CI2	2.113	3.661	15.039	61.269
	CI3	2.721	4.498	17.336	69.311
	CI4	4.071	7.484	33.027	137.983
10	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	1.221	2.056	7.821	29.998
	Modified Cox	1.111	1.783	6.145	22.724
	CI1	1.033	1.644	5.542	20.270
	CI2	1.128	1.881	7.017	26.707
	CI3	1.276	2.085	7.478	28.176
	CI4	1.424	2.443	9.604	37.311
20	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	0.763	1.211	4.358	16.195
	Modified Cox	0.736	1.144	3.917	14.303
	CI1	0.712	1.103	3.739	13.580
	CI2	0.737	1.166	4.154	15.369
	CI3	0.785	1.230	4.292	15.824
	CI4	0.816	1.306	4.787	17.934
30	Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	0.608	0.946	3.371	12.372
	Modified Cox	0.594	0.913	3.153	11.404
	CI1	0.581	0.892	3.059	11.027
	CI2	0.595	0.924	3.269	11.961
	CI3	0.619	0.957	3.347	12.183
	CI4	0.635	0.993	3.583	13.223

จากตารางที่ 3 พิจารณาร้อยละของค่าครอบคลุมของช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่าช่วงความเชื่อมั่น Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy และ CI2 มีร้อยละของค่าครอบคลุมใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนช่วงความเชื่อมั่น Modified Cox, CI1 และ CI4 มีร้อยละของค่าครอบคลุมต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่จะใกล้เคียงเมื่อความแปรปรวนมีค่าน้อย และช่วงความเชื่อมั่น CI3 มีร้อยละของค่าครอบคลุมมากกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่เมื่อพิจารณาความกว้างของช่วงเฉลี่ยสำหรับช่วงความเชื่อมั่นที่มีร้อยละของค่าครอบคลุมใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดดังตารางที่ 4 พบว่าช่วงความเชื่อมั่น CI2 มีความกว้างของช่วงเฉลี่ยน้อยกว่า Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy

3.2 ความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นจากข้อมูลจริง

ความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ $\ln\theta$ เมื่อ $\theta = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ จากข้อมูลจริง (4) ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% และ 95% โดยเป็นข้อมูลของปริมาณคาร์บอนมอนอกไซด์ (หน่วย: ppm) ที่วัดจากโรงกลั่นน้ำมันที่ตั้งอยู่ทางตะวันออกเฉียงเหนือของ San Francisco เป็นเวลา 31 วันได้แก่ 45, 30, 38, 42, 63, 43,102, 86, 99, 63, 58, 34, 37, 55, 58, 153, 75, 58, 36, 59, 43, 102, 52, 30, 21, 40, 141, 85, 161, 86, 71 จำนวน 31 ค่า ซึ่งมี $\overline{y}$ เท่ากับ 4.074252 และ s^2 เท่ากับ 0.252081 โดย $\overline{y}+\frac{s^2}{2}$ เท่ากับ 4.200292 แสดงได้ดังตารางที่ 5-6

ตารางที่ 5. ความกว้างของช่วงสำหรับข้อมูลจริงที่ระดับความเชื่อมั่น 90%

ช่วงความเชื่อมั่น	ขอบล่าง	ขอบบน	ความกว้าง
Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	4.101	4.432	0.331
Modified Cox	4.088	4.415	0.328
CI1	4.088	4.415	0.328
CI2	4.169	4.370	0.201
CI3	4.091	4.430	0.339
CI4	4.106	4.447	0.341

ตารางที่ 6. ความกว้างของช่วงสำหรับข้อมูลจริงที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

ช่วงความเชื่อมั่น	ขอบล่าง	ขอบบน	ความกว้าง
Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy	4.075	4.484	0.409
Modified Cox	4.055	4.449	0.394
CI1	4.055	4.449	0.394
CI2	4.157	4.398	0.241
CI3	4.056	4.464	0.408
CI4	4.078	4.501	0.423

จากตารางที่ 5 และ 6 พบว่า ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% และ 95% ช่วงความเชื่อมั่นที่มีค่าความกว้างของช่วงต่ำที่สุด คือ ช่วงความเชื่อมั่น CI2

4. สรุปผลการวิจัย

สำหรับการจำลองข้อมูลเมื่อพิจารณาร้อยละของค่าครอบคลุมของช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับความเชื่อมั่นทั้ง 90% และ 95% พบว่า ช่วงความเชื่อมั่น Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy และ CI2 มีร้อยละของค่าครอบคลุมใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนช่วงความเชื่อมั่น Modified Cox, CI1 และ CI4 มีร้อยละของค่าครอบคลุมต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่จะใกล้เคียงเมื่อความแปรปรวนมีค่าน้อย และช่วงความเชื่อมั่น CI3 มีร้อยละของค่าครอบคลุมมากกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่เมื่อพิจารณาความกว้างของช่วงเฉลี่ยสำหรับช่วงความเชื่อมั่นที่มีร้อยละของค่าครอบคลุมใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด พบว่า ช่วงความเชื่อมั่นที่นำเสนอ CI2 มีความกว้างของช่วงเฉลี่ยน้อยกว่า Generalized Confidence Interval of Krishnamoorthy เมื่อพิจารณาจากข้อมูลจริง 1 ชุด พบว่าช่วงความเชื่อมั่นที่นำเสนอ CI2 ให้ค่า

ความกว้างของช่วงต่ำที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับการจำลองข้อมูลเมื่อพิจารณาจากช่วงความเชื่อมั่นที่มีร้อยละของค่าครอบคลุมใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณกองทุนสนับสนุนด้านวิจัยภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น สำหรับการสนับสนุนทุนวิจัยครั้งนี้

6. เอกสารอ้างอิง

(1) Krishnamoorthy K, Mathew T. Inferences on the means of log-normal distributions using generalized p-values and generalized confidence intervals. Journal of Statistical Planning and Inference. 2003; 115: 103-21.

(2) Olsson U. Confidence intervals for the mean of a log-normal distribution. Journal of Statistics Education. 2005; 13(1): www.amstat.org/publications/jse/v13n1/olsson.html.

(3) Zhou XH, Gao S. Confidence intervals for the log-normal mean. Statistics in Medicine. 1997; 16: 783-90.

(4) Land CE. Confidence intervals for linear functions of the normal mean and variance. Annals of Mathematical Statistics. 1971; 42: 1187-205.

(5) Angus JE. Inferences on the Lognormal mean for complete samples. Communications in Statistics-Simulation and Computation. 1998; 17: 1307-31.

(6) Efron B, Tibshirani RJ. An introduction to the bootstrap. 6th ed. Chapman & Hall; 1993.

(7) Harvey J , Van der Merwe AJ. Bayesian confidence intervals for means and variances of lognormal and bivariate lognormal distributions. Journal of Statistical Planning and Inference. 2011; 142:1294-309.

(8) Zou GY, Huo CY, Taleban J. Some confidence intervals for lognormal means and their differences with environmental applications. Environmetrics. 2009; 20: 172-80.